

# 对称弯压拱面内失稳类型的变形判断

韦建刚, 陈宝春, 吴庆雄

(福州大学土木工程学院, 福建 福州 350108)

**摘要:** 对称弯压拱存在分支屈曲与极值点失稳 2 种面内失稳形式. 根据在失稳前后拱轴线变形形状的不同, 提出了对称弯压拱失稳类型的变形判断方法, 它可用拱轴线变形增量来判断, 也可以通过关键截面的荷载 - 位移曲线来判断. 将这种变形判断法应用于有限元分析中, 对 2 个实例的计算表明, 该判断方法正确、有效.

**关键词:** 拱; 稳定; 面内; 非线性; 变形; 有限元

**中图分类号:** TU311.2

**文献标识码:** A

## A deformed - status distinguish method for in - plane buckling of symmetrical press - bending arches

WEI Jian - gang, CHEN Bao - chun, WU Qing - xiong

(College of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350108, China)

**Abstract:** In - plane buckling of symmetrical press - bending arches can be subdivided into two types: bifurcation buckling and limit - point buckling. Based on the difference of arch axis deformation shape between pre - buckling and post - buckling, the deformed - status distinguish method is presented for in - plane buckling of symmetrical press - bending arches. It can be described by deformation increment of arch rib or by loads - deform curve of characteristic sections. This method is used into FE analysis. The calculating results of two sample arches demonstrate that the proposed method is accurate and effective.

**Keywords:** arch; buckling; in - plane; nonlinear; deformation; finite element method

### 1 概述

拱是以承压能力见长的结构, 因此拱结构的面内稳定历来是结构稳定性研究中一个活跃的课题. 与其它结构一样, 拱的面内稳定按照平衡路径的改变与否可分为极值点失稳与分支屈曲 2 种类型.

通常, 对结构的失稳类型主要通过失稳点前后受力状况性质的改变与否来进行判别, 但是, 对于初期已存在轴力和弯矩的弯压拱而言, 采用经典的失稳前后拱截面从纯压平衡向弯压平衡的判断方法就不再适用, 从而必须寻找其它的判断方法.

随着非线性力学和有限元技术的发展, 有限元分析已成为结构稳定问题研究的主要手段; 特征值法和时程追踪法是有限元技术中分析拱的稳定性的两种主要方法<sup>[1-2]</sup>. 特征值法可以解决几何线性稳定问题, 但是若要计及几何非线性和材料非线性等因素的影响, 则需要采用全过程追踪法才能得到荷载 - 位移全过程曲线, 因此, 全过程追踪法成为拱的非线性稳定性问题研究采用的主要手段<sup>[3-6]</sup>. 在全过程追踪法中, 分支点与极值点同样是荷载 - 位移曲线上的失稳点 (数学上的拐点), 如果不对失稳点的特性进行判断, 就有可能遗漏在极值点出现之前发生分支屈曲的可能性<sup>[7]</sup>, 或者可能造成在拱的试验中产生了分支屈曲而还认为是极值点失稳的误断<sup>[8]</sup>.

本文分析了对称弯压拱面内失稳破坏的变形特征, 从拱轴线形状变化入手, 提出了对称弯压拱分支失稳

收稿日期: 2008 - 05 - 13

作者简介: 韦建刚 (1971 - ), 男, 副研究员, 博士.

基金项目: 福建省教育厅科研资助项目 (JA07014)

和极值点失稳的变形判断方法,并将其应用于有限元分析中,最后进行了 2 个实例的分析验证.

### 2 问题的提出

结构的失稳研究是从 Euler 直杆开始的. 轴压杆在轴向荷载  $P$  未达到临界值  $P_{cr}$  之前,杆件将保持轴向压缩的平衡状态,而当荷载达到临界值时,稍有缺陷或干扰,直杆的平衡形式将可能从轴压的平衡状态转向横向弯曲的平衡状态,平衡状态发生了分支,即所谓的分支屈曲;而对于如压弯杆件等原始就存在轴向力和弯矩的杆件,在荷载作用过程中始终保持弯曲形式的平衡,即使荷载超过临界荷载,其平衡形式只是在原来平衡形式下变形的加剧,没有平衡状态的改变,即所谓的极值点失稳<sup>[9-10]</sup>.

对于纯压拱,不考虑拱的压缩变形产生的附加内力时,失稳前的受力只有轴压力没有弯矩,荷载达到临界值之后,拱可能由原来的纯压转向弯压,出现了受力平衡状态分支导致的失稳破坏,这就是纯压拱线性分支屈曲的经典问题,见图 1(a). 对于一开始就承受有弯矩和轴压的拱,拱从受力开始直至破坏,其截面的受力平衡状态并不发生质变,在导致拱的破坏中考虑了轴力在竖向变形方向上产生的附加内力,此即为拱的极值点失稳问题,如图 1(b)所示<sup>[11]</sup>.

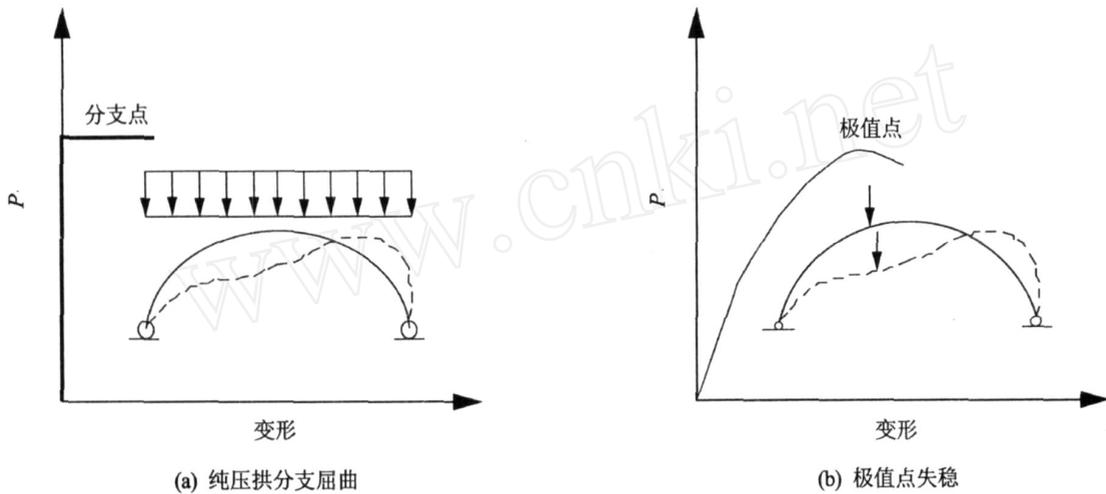


图 1 拱的面内失稳

Fig 1 In - plane buckling of arch

在工程实际中,由于荷载的变化纯压拱较为少见,大量应用的拱是既承受轴压力也承受弯矩的弯压拱. 即使是纯压拱,计及拱轴线压缩的几何非线性影响 ( $P$ - 效应)后,截面上也会产生附加弯矩,从这个意义上说,纯压拱是不存在的.

对于弯压拱来说,可简单地分为非对称荷载作用下的弯压拱和对称荷载作用下的弯压拱. 非对称荷载作用下的弯压拱,一般均发生极值点失稳. 然而,对于对称荷载作用下的弯压拱,既可能发生极值点失稳,也可能发生分支点失稳<sup>[7]</sup>,在一些试验中 2 种现象均有出现<sup>[11-12]</sup>.

对于对称荷载作用下的弯压拱是出现极值点失稳还是分支点失稳,由于拱一开始就承受轴压力与弯矩 2 种内力,因此采用受力是否从纯压平衡向弯压平衡作为分支失稳的判断就不再适用,国外虽然对此问题有一定的研究,但也未见明确的判断方法<sup>[13-14]</sup>,国内对这一问题研究极少,许多文献中甚至对此现象没有介绍<sup>[1,15]</sup>. 因此,本文将针对对称荷载作用下弯压拱是出现极值点失稳还是分支点失稳,提出采用变形判断的方法.

### 3 不同失稳类型的变形特征

轴压直杆发生分支屈曲的前后其杆轴线从直线变为旁弯的曲线;弯压直杆则在极值点失稳前后的轴线均为旁弯的曲线. 因此,轴压直杆与弯压直杆发生分支屈曲与极值点失稳的判断除以受力状态是否从一种状态向另一种状态改变外,也可以用失稳前后轴线变化的变化来判断.

弯压拱在对称荷载作用下的轴线变形如图 2 和图 3 所示. 如果拱发生面内分支屈曲, 拱轴线变形形状将发生改变, 如图 2(a)、图 3(a)由对称变形向反对称的 S 形变形转化. 如果拱发生面内极值点失稳, 如图 2(b)、图 3(b)所示, 拱轴线变形在失稳前后的形状不变.

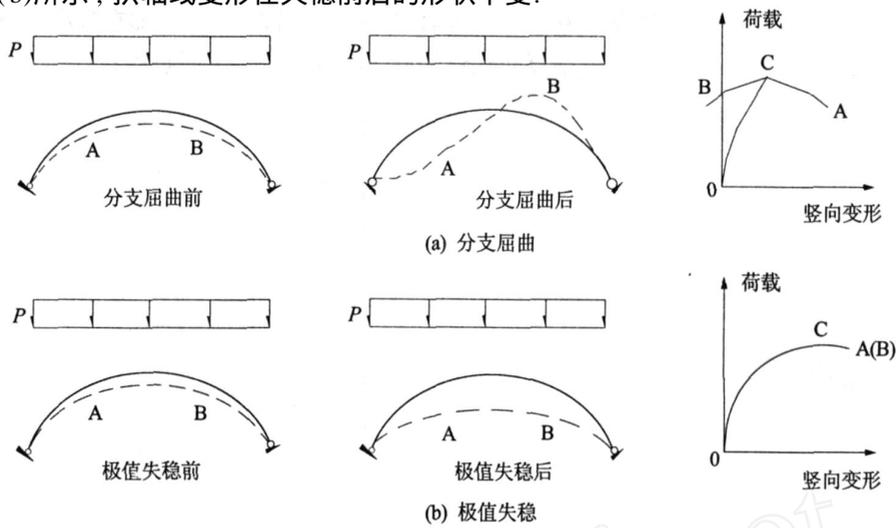


图 2 多点对称加载下拱的面内失稳形式

Fig. 2 In - plane buckling modes of arch under multi - symmetry loads

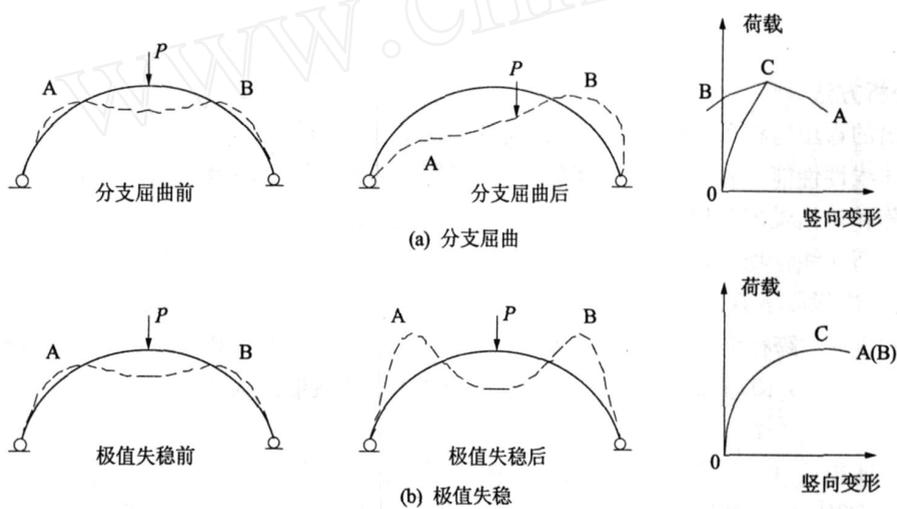


图 3 拱顶加载下拱的面内失稳形式

Fig. 3 In - plane buckling modes of arch under central concentrated load

### 4 失稳类型的判断

对于在对称荷载作用下的弯压拱的失稳问题, 可以通过失稳前、后变形状态的改变来进行判断. 应该指出的是, 由于失稳发生前拱结构在逐步增加的荷载作用下已发生了相当变形, 在某一极荷载下突然发生失稳时, 从位移总量上进行判断相对困难时, 应采用变形增量的形状来判断.

在以增量法进行拱的受力全过程分析中, 可以将各增量荷载作用下拱轴的变形增量输出画成曲线, 通过前后变形曲线的形状对拱的失稳类型进行判断.

从图 2 和图 3 中可以看出, 失稳前的拱轴线变形为 1 个或 3 个半波, 极值点失稳时变形形状没有发生变化, 分支点失稳拱拱轴变形为 2 个半波 (S 形) 或 3 个半波 (M 形), 因此, 拱顶  $1/2L$ 、 $1/4L$  和  $3/4L$  点或附近是拱轴变形曲线中的关键点. 通过这些点的荷载 - 位移曲线的变化可以对拱的失稳类型进行判断.

如图 4(a)所示, 拱发生极值点失稳时在荷载达到峰值点 C 的前后  $t_1$  时刻和与  $t_2$  时刻, 关键截面的荷

载 - 位移曲线中变形增量的方向是一致的; 对于分支点失稳, 在荷载达到临界荷载点  $C$  的前后  $t_1$  时刻和与  $t_2$  时刻, 关键截面的荷载 - 位移曲线中变形增量的方向是相反的,  $C$  点成为该截面的最大变形值, 如图 4(b) 所示.

需要指出的是, 对上述失稳点类型的判断方法应需要具备一个前提条件, 即在有限元分析中, 要能够进行结构受力的全过程分析, 能够判断失稳点并跃过失稳点转入失稳后的平衡路径.

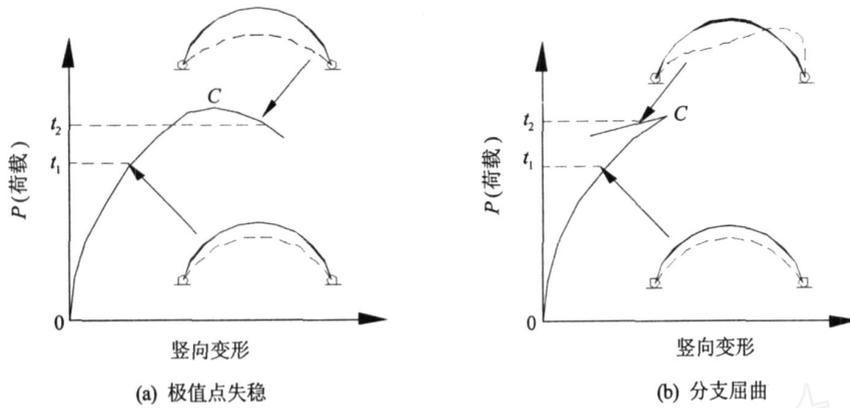


图 4 弯压拱的面内失稳变形判断

Fig 4 Deformed - status distinguish for in - plane buckling of press - bending arches

## 5 实例分析

### 5.1 有限元分析方法

将前述提出的弯压对称拱失稳类型变形判断的方法应用于非线性有限元分析之中. 为了更精确地计算结构的几何非线性性能, 采用了文献 [16] 提出的有限元方法. 该方法考虑了两方向曲率和扭转角变化的坐标转换矩阵和包括轴向变形和扭转的非线性项的刚度矩阵, 能更精确地描述任意增量下的单元平移和转动和高阶几何非线性项的影响. 该方法采用广义位移控制法进行增量迭代.

### 5.2 两铰拱的面内极限承载力问题

两端铰支的钢拱, 跨径为 119 m, 矢高为 15 m, 断面面积为  $8.65 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , 面内惯性矩  $3.64 \times 10^{-2} \text{ m}^4$ , 弹性模量为  $2.058 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ . 均布荷载作用于拱上, 加载形式为均布对称加载. 假设材料为线弹性, 该拱为极值点失稳 [17].

图 5 为计算所得荷载 - 跨中位移曲线图. 从图中可以看出, 有限元计算结果与文献 [17] 的结果十分吻合, 说明有限元程序的正确性. 失稳点前后的竖向位移增量图表示在图 6 中. 表示的时刻为初期、失稳点和失稳后的值. 从图中拱轴线形状的变化可以知道, 其失稳前后的拱轴线变形形状则始终保持一致, 说明该拱发生了极值点失稳, 这与文献 [17] 的结论是一致的.

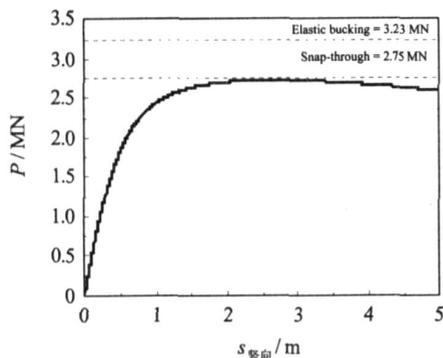


图 5 荷载 - 跨中竖向位移图

Fig. 5 Load - deflection curve of span center

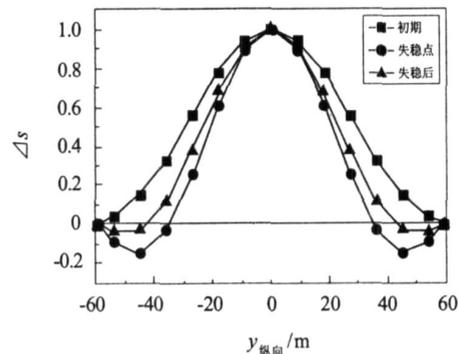


图 6 竖向位移增量图

Fig. 6 Increment of vertical deflection

图 7 为该拱计算所得的拱  $1/4L$ 、 $1/2L$ 、 $3/4L$  截面处的荷载 - 位移关系曲线, 从图 7 中可以看出: 极值点失稳的荷载 - 位移曲线在极值点处没有发生反向点.

### 5.3 两铰拱的面内分支屈曲问题

两铰圆弧拱的中心角为  $180^\circ$ , 跨径为  $508\text{ mm}$ , 矢跨比为  $0.5$ , 断面面积为  $0.5\text{ mm}^2$ , 断面面内惯性矩为  $2.585\text{ mm}^4$ , 弹性模量为  $7.171 \times 10^4\text{ MPa}$ . 竖向集中荷载  $P$  作用于拱顶. 假设材料为线弹性, 拱发生面内分支屈曲<sup>[7]</sup>.

图 8 为本文的计算结果, 从图 8 中可知, 本方法的计算结果和文献 [7] 的计算结果基本一致.

拱在受荷初期、失稳点和失稳后的竖向位移增量图表示在图 9 中. 从图 9 中拱轴线形状的变化可以知道, 其拱轴线形状从屈曲前的对称变为屈曲后的反对称, 说明该拱发生了分支屈曲, 这与文献 [7] 的结论是一致的.

图 10 为该拱计算所得的拱  $1/4L$ 、 $1/2L$ 、 $3/4L$  截面处的荷载 - 位移关系曲线, 从图 10 中可以看出: 发生分支屈曲的拱, 其  $3/4L$  的荷载 - 位移曲线上在分支点处发生反向的转折.

从以上说明可知, 本文提出的变形判断用于分支屈曲时是恰当的, 本有限元程序实现了这一方法.

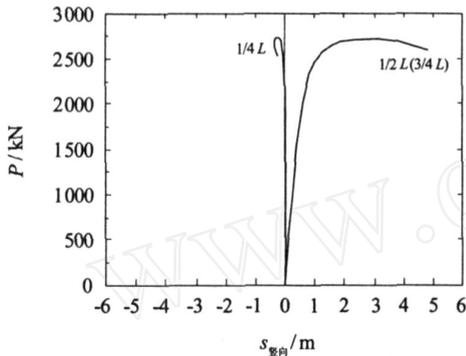


图 7 荷载 - 位移曲线  
Fig. 7 Load - deflection curve

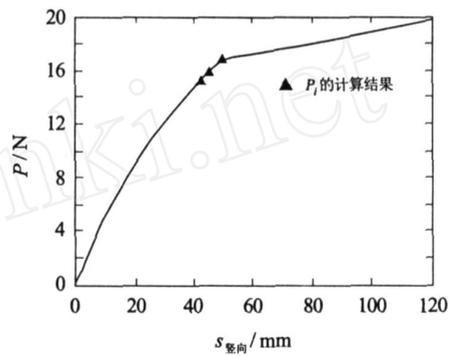


图 8 荷载 - 跨中竖向位移图  
Fig. 8 Load - deflection curve of span center

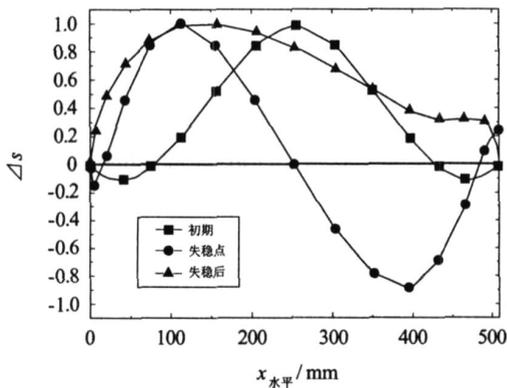


图 9 竖向位移增量图  
Fig. 9 Increment of vertical deflection

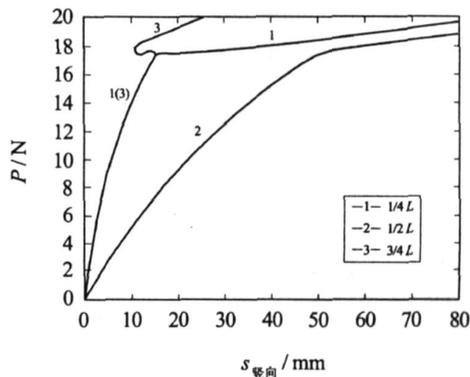


图 11 荷载 - 位移曲线  
Fig. 11 Load - deflection curve

## 6 结语

对称弯压拱存在分支屈曲与极值点失稳 2 种失稳类型. 由于弯压拱从受力开始拱截面上即存在轴力与弯矩的共同作用, 因此难以用拱的受力状态对其失稳类型进行判断. 本文根据在分支点失稳与极值点失稳点前后拱轴线变形形状的特征, 提出了变形判断法, 它可以用拱轴线变形增量来判断, 也可以通过关键截面的荷载 - 位移曲线来判断. 将这种变形判断法应用于有限元分析中, 对 2 个实例的计算表明, 该判断方法是可行的.

(转第 276 页)

## 参考文献:

- [1] Jaeger J C. Shear failure of anisotropic rocks[J]. *GeolMag*, 1960, 97: 65 - 72
- [2] Pinto J L. Deformability of schistous rocks[C]//*Proceedings 2nd Conference International Science Rock Mechanics* Belgrade: [s n], 1970, 1: 491 - 496
- [3] Kwasniewski M, Neuyen H V. Experimental studies on anisotropy of the time - dependent behaviour of bedded rocks[C]//*Proc of the Int Symp on Eng in Compl Rock Foem*. Beijing: [s n], 1986: 325 - 337
- [4] Amadei B. Importance of anisotropy when estimating and measuring in situ stress in rock[J]. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr*, 1996, 33(3): 293 - 325.
- [5] 曹文贵, 颜荣贵. 小铁山矿各向异性石英角斑岩力学参数量测与研究[J]. *湖南有色金属*, 1995, 11(4): 1 - 6
- [6] Tien Y M, Tsao P F. Preparation and mechanical properties of artificial transversely isotropic rock[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2000, 37: 1 001 - 1 012
- [7] Tien Y M, Kuo M C, Juang C H. An experimental investigation of the failure mechanism of simulated transversely isotropic rocks[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2006, 43: 1 163 - 1 181.
- [8] 冒海军, 杨春和. 结构面对板岩力学特性影响研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24(20): 3 651 - 3 656
- [9] GB/T 50266 - 99, 工程岩体试验方法标准[S].

(责任编辑: 杨青)

(接第 271 页)

## 参考文献:

- [1] 项海帆, 刘光栋. 拱结构稳定与振动[M]. 北京: 人民交通出版社, 1990
- [2] Theodore V. Guide to stability design criteria for metal structures[M]. 5th ed New York: John Wiley & Sons, 1998
- [3] 胡大琳, 艾夫·哈依姆, 黄安录. 大跨径钢管混凝土拱桥空间几何非线性分析[J]. *中国公路学报*, 1998(2): 45 - 51.
- [4] 程进, 江见鲸, 肖汝城, 等. 大跨度钢拱桥结构极限承载力分析[J]. *工程力学*, 2004, 21(4): 7 - 10
- [5] Bradford M A, Uy B, Pi Y L. In - plane elastic stability of arches under a central concentrated load[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(7): 710 - 719.
- [6] Pi Yong - Lin, Bradford M A. Elasto - plastic buckling and postbuckling of arches subjected to a central load[J]. *Computers and Structures*, 2003, 81: 1 811 - 1 825.
- [7] Pi Yong - Lin, Trahair N S. Non - linear buckling and postbuckling of elastic arches[J]. *Engineering Structure*, 1998, 20(7): 571 - 579.
- [8] 陈克济. 钢筋混凝土拱面内承载力非线性分析[J]. *桥梁建设*, 1983(1): 24 - 36
- [9] 永毓栋, 王志骞. 钢结构稳定性原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
- [10] 吴明德. 弹性杆件稳定原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988
- [11] 陈宝春, 陈友杰. 钢管混凝土拱面内受力全过程试验研究[J]. *工程力学*, 2000, 17(2): 44 - 50.
- [12] 林英, 陈宝春, 陈友杰. 钢管拱面内对称加载试验[J]. *福州大学学报: 自然科学版*, 2001, 29(2): 66 - 69.
- [13] Pi Y L, Bradford M A, Uy B. In - plane stability of arches[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39: 105 - 125
- [14] Pi Yong - Lin, Trahair N S. In - plane inelastic buckling and strengths of steel arches[J]. *Journal of Structural Engineer*, 1996, 122(7): 734 - 745.
- [15] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1996
- [16] 吴庆雄, 陈宝春, 韦建刚. 钢管混凝土拱双重非线性有限元分析的一种方法[J]. *工程力学*, 2008, 25(6): 68 - 74.
- [17] Maeda Y, Hayashi M. Finite displacement analysis of space framed structures[J]. *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering*, JSCE, 1976, 253: 13 - 27.

(责任编辑: 王阿军)